EXERCÍCIOS

1. Seja A um conjunto. Mostre que se $\leq$ é uma relação de ordem sobre A, então a relação $<$ possui as seguintes propriedades:

   (a) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$, para todos $x, y, z \in A$.

   (b) No máximo uma das condições ocorre: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$. (assimétrica)

   Reciprocamente, mostre se $<$ é uma relação sobre A satisfendo às propriedades (a) e (b), então uma relação de ordem sobre $\mathcal{A}$ é definida como $x \leq y$ se, e somente se, $x < y$ ou $x = y$.

2. Sejam A, B dois conjuntos e $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os pares (X, f), onde $X \subseteq A$ e $f : X \to B$ é uma função. Para $(X, f), (Y, g) \in \mathcal{C}$, definimos

   $$(X, f) \leq (Y, g) \Leftrightarrow X \subseteq Y \ \text{ e } \ f(x) = g(x) \ \ (f = g|_X), \ \ \forall \ x \in X.$$

   Mostre que $\leq$ é uma ordem sobre $\mathcal{C}$.

3. Sejam A e B dois posets. Para $(a, b), (c, d) \in A \times B$, definimos

   $$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a < c \ \text{ ou } \ a = c \ \text{ e } \ b \leq d.$$

   Mostre que $\preceq$ é uma ordem sobre $A \times B$, chamada de *ordem lexicográfica*.

4. Seja $A = \mathbb{N}$. Para $x, y \in A$, definimos

   $$x \leq y \Leftrightarrow x \ \text{ é um múltiplo de } \ y.$$

   Mostre $\leq$ é uma ordem sobre A.

5. Seja $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \leq 0\}$. Para $(a, b), (c, d) \in A$, definimos

   $$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \text{ e } \ b \leq d.$$

   Mostre que $\leq$ é uma ordem sobre A.

6. Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função qualquer. Para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow f(a, b) \leq f(c, d).$$

Mostre que $\preceq$ é uma ordem sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

7. Seja $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$ uma família de ordens sobre A. Mostre que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ é uma ordem sobre A.

8. Sejam A, B dois posets e

$$\mathcal{F} = \{f : A \to B : f \text{ é uma função}\}.$$

Para $f, g \in \mathcal{F}$, definimos

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall \ x \in A.$$

Mostre que $\preceq$ é uma ordem sobre $\mathcal{F}$ que não é total.

9. Sejam A e B dois posets. Para $(a, b), (c, d) \in A \times B$, definimos

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow b < d \text{ ou } b = d \text{ e } a \leq c.$$

Mostre que $\preceq$ é uma ordem sobre $A \times B$, chamada de *ordem antilexicográfica*.

10. Sejam A, B dois posets e C, D cadeias de A e B, respectivamente. Mostre que se $A \times B$ é ordenado lexicograficamente, então $C \times D$ é uma cadeia de $A \times B$.

11. Sejam A, B dois posets e $A \times B$ ordenado antilexicograficamente. Mostre que se (E, D) é um corte de B, então $(A \times E, A \times D)$ é um corte de $A \times B$.

12. Sejam I um conjunto totalmente ordenado, $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos totalmente ordenados disjuntos aos pares. Neste caso, diremos que $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma *família totalmente ordenada*. Seja $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Dados $a, b \in A$, existem únicos $i, j \in I$ tais que $a \in A_i$ e $b \in A_j$, definimos

$$[a \preceq b, \text{ se } i < j] \text{ e } [a \leq b \text{ sobre } A_i, \text{ se } i = j].$$

Mostre que $\preceq$ é uma ordem total sobre A.

EXERCÍCIOS

1. Sejam A e B dois posets. Mostre que se $f : A \to B$ é uma função crescente e injetora, então f é estritamente crescente.

2. Sejam A e B dois posets.

   (a) Mostre que se $A \times B$ é ordenado lexicograficamente, então $p_1 : A \times B \to A$ é uma função crescente.

   (b) Mostre que se $A \times B$ é ordenado antilexicograficamente, então $p_2 : A \times B \to B$ é uma função crescente.

3. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ uma função crescente. Mostre que se C é uma cadeia em A, então $f(C)$ é uma cadeia em B.

4. Sejam D um poset e C um subconjunto de D. Diremos que C é *convexo* se a seguinte condição for satisfeita:

$$\forall\ a, b \in C\ [a \leq x \leq b \Rightarrow x \in C].$$

   Mostre que se $f : A \to B$ é uma função crescente e C é um subconjunto convexo de B, então $f^{-1}(C)$ é um subconjunto convexo de A.

5. Sejam A, B dois posets, $f : A \to B$ uma função crescente e R uma relação de equivalência sobre A determinada por f. Mostre que cada classe $\overline{x}$ é um subconjunto convexo de A.

6. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ uma função crescente e sobrejetora. Mostre que se (E, D) é um corte de B, então $(f^{-1}(E), f^{-1}(D))$ é um corte de A.

7. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ um isomorfismo

(a) Mostre que se C é um subconjunto convexo de A, então $f(C)$ é um subconjunto convexo de B.

(b) Mostre que se (E, D) é um corte de A, então $(f(E), f(D))$ é um corte de B.

(c) Mostre que se $[a, b]$ é um intervalo fechado de A, então $f([a, b])$ é um intervalo fechado de B.

8. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ um isomorfismo. Mostre que $f(S_a) = S_{f(a)}$, para todo $a \in A$. Conclua que $S_a \simeq S_{f(a)}$.

9. Sejam A um poset e $I_a = \{x \in A : x \leq a\}$, para cada $a \in A$. Mostre que se a família $\mathcal{F} = \{I_a\}_{a \in A}$ é ordenada pela inclusão, então $\mathcal{F}$ é isomorfo a A.

10. Sejam A um poset, $E_a = \{x \in A : x \leq a\}$ e $D_a = \{x \in A : x \nleq a\}$.

    (a) Mostre que (E_a, D_a) é um corte de A, para todo $a \in A$.

    (b) Seja $C = \{(E_a, D_a)\}_{a \in A}$ a família de todos os cortes de A. Mostre que a função $\varphi : A \to C$ definida por $\varphi(a) = (E_a, D_a)$ é um isomorfismo.

11. Mostre que se A é um conjunto totalmente ordenado e $f : A \to B$ é um isomorfismo, então B é um conjunto totalmente ordenado.

EXERCÍCIOS

1. Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais com a ordem usual e $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que se $a < b$, então
   $$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

   (b) Mostre que se $b > 0$, então
   $$0 < \frac{b}{2} < b.$$

   (c) Mostre que se $0 \leq a < \epsilon$, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$, então $a = 0$.

   (d) Mostre que se $a - \epsilon < b$, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$, então $a \leq b$.

   (e) Mostre que se $0 < a < 1$, então $0 < a^2 < a < 1$.

2. Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais ordenado por x divide y e $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Mostre que $\inf(B)$ e $\sup(B)$ existe em $\mathbb{N}$.

3. Sejam A e B dois posets. Mostre cada uma das afirmações abaixo e enuncie a dual.

   (a) Se A contém um maior elemento a, B contém um maior elemento b e $A \subseteq B$, então $a \leq b$.

   (b) Se C, D são subconjuntos de A e $C \subseteq D$, então $S(D) \subseteq S(C)$.

   (c) Se C, D são subconjuntos de A, $C \subseteq D$ e cada C e D possui supremo em A, então $\sup(C) \leq \sup(D)$.

4. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ uma função estritamente crescente. Mostre que se b é um elemento maximal de B, então cada elemento de $f^{-1}(b)$ é um elemento maximal de A.

5. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ uma função crescente. Mostre que se a é o maior elemento de A, então $f(a)$ é o maior elemento de $f(A)$.

6. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ uma função crescente. Mostre que se $C \subseteq A$ e a é uma cota superior de C, então $f(a)$ é uma cota superior de $f(C)$.

7. Sejam A, B dois posets e $f : A \to B$ um isomorfismo.

   (a) Mostre que a é um elemento maximal (minimal) de A se, e somente se, $f(a)$ é um elemento maximal (minimal) de B.

   (b) Mostre que a é o maior (menor) elemento de A se, e somente se, $f(a)$ é o maior (menor) elemento de B.

   (c) Suponhamos que C seja um subconjunto de A. Mostre que $x \in A$ é uma cota superior (inferior) de C se, e somente se, $f(x) \in B$ é uma cota superior (inferior) de $f(C)$.

   (d) Suponhamos que C seja um subconjunto de A. Mostre que $a = \sup(C)$ ($a = \inf(C)$) se, e somente se, $f(a) = \sup(f(C))$ ($f(a) = \inf(f(C))$).

8. Seja A um poset. Mostre que se qualquer subconjunto de A possui um supremo e um ínfimo, então A possui um menor e um maior elemento.

9. Seja A um reticulado. Mostre que se $[a, b]$ e $[c, d]$ são intervalos fechados de A, então
$$[a, b] \cap [c, d] = [\sup\{a, c\}, \inf\{b, d\}].$$

10. Seja A um reticulado. Mostre que qualquer intervalo fechado $[a, b]$ de A é um sub-reticulado de A.

11. Seja A um conjunto totalmente ordenado. Mostre que qualquer elemento minimal (maximal) é um menor (maior) elemento de A.

12. Mostre que qualquer conjunto parcialmente ordenado finito possui um elemento maximal (minimal).

13. Seja A um poset com um único elemento maximal M. É verdade ou falsa a afirmação M é o maior elemento de A?

14. Sejam F um corpo, V um espaço vetorial sobre F e

$$\mathcal{F} = \{W \subseteq V : W \text{ é um subespaço de } V\}.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{F}$ é um conjunto ordenado pela inclusão.

   (b) Mostre que $\mathcal{F}$ possui menor e maior elemento.

   (c) Mostre que $\inf\{U, W\} = U \cap W$ e $\sup\{U, W\} = U + W$, para todos $U, W \in \mathcal{F}$.

   (d) Mostre que $\mathcal{F}$ é um reticulado.

3.4 CONJUNTOS BEM ORDENADOS

2. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais com a ordem usual. Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, existe um número irracional x tal que $a < x < b$.

3. Supondo que o conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$, com a ordem usual, seja completo.

   (a) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$, então existe $n = n(a) \in \mathbb{Z}$ tal que $a < n$.

   (b) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

   (c) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, então
   $$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}} [na, (n+1)a[,$$
   é uma união disjunta de intervalos.

   (d) Mostre que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, existe um único $q \in \mathbb{Z}$ tal que
   $$b = qa + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

4. Seja $A = \{1, 3, 5, \ldots ; 2, 4, 6, \ldots\}$ ordenado da esquerda para a direita. Mostre que 1 e 2 não possuem predecessores imediados. Além disso, determine os segmentos iniciais S_1, S_5, S_2 e S_8.

5. Seja A um CBO. Dado $a \in A$, vamos denotar por a^- e a^+ o predecessor imediato (se ele existir) e o sucessor imediato de a, respectivamente.

   (a) Mostre que $a \leq b$ se, e somente se, $a^+ \leq b^+$.

   (b) Mostre que $a = b$ se, e somente se, $a^+ = b^+$.

   (c) Mostre que $a < b$ se, e somente se, $a^- < b^-$.

   (d) Mostre que $a = b$ se, e somente se, $a^- = b^-$.

   (e) Mostre que $a = b^+$ se, e somente se, $a^- = b$.

2. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais com a ordem usual. Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, existe um número irracional x tal que $a < x < b$.

3. Supondo que o conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$, com a ordem usual, seja completo.

   (a) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$, então existe $n = n(a) \in \mathbb{Z}$ tal que $a < n$.

   (b) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

   (c) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, então

   $$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}} [na, (n+1)a[,$$

   é uma união disjunta de intervalos.

   (d) Mostre que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, existe um único $q \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$b = qa + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

4. Seja $A = \{1, 3, 5, \ldots; 2, 4, 6, \ldots\}$ ordenado da esquerda para a direita. Mostre que 1 e 2 não possuem predecessores imediados. Além disso, determine os segmentos iniciais S_1, S_5, S_2 e S_8.

5. Seja A um CBO. Dado $a \in A$, vamos denotar por a^- e a^+ o predecessor imediato (se ele existir) e o sucessor imediato de a, respectivamente.

   (a) Mostre que $a \leq b$ se, e somente se, $a^+ \leq b^+$.

   (b) Mostre que $a = b$ se, e somente se, $a^+ = b^+$.

   (c) Mostre que $a < b$ se, e somente se, $a^- < b^-$.

   (d) Mostre que $a = b$ se, e somente se, $a^- = b^-$.

   (e) Mostre que $a = b^+$ se, e somente se, $a^- = b$.

6. Seja A um CBO. Diremos que $q \in A$ é um *elemento limite* de A se q não é o menor elemento de A e nem possui um predecessor imediato ou, equivalentemente, se para qualquer $a \in A$, com $a < q$, existe $b \in A$ tal que $a < b < q$.

   (a) Mostre que no conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$, com a ordem usual, qualquer elemento é um elemento limite.

   (b) Mostre que q é um elemento limite de A se, e somente se,
   $$a < q \Rightarrow a^+ < q,$$
   em que a^+ representa o sucessor imediato de a.

   (c) Mostre que q é um elemento limite de A se, e somente se,
   $$q = \sup\{x \in A : x < q\}.$$

7. Seja
   $$A = \left\{m + \frac{n}{n+1} : m, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$$
   com a ordem induzida por $\mathbb{R}$. Determine, se existir, os elementos limites de A.

8. Seja A um CBO. Mostre que $S = \bigcup_{a \in B} S_a$ é um segmento inicial de A, onde $B \subseteq A$. Conclua que $S_a \cup \{a\}$ é um segmento inicial de A, para cada $a \in A$, fixado.

9. Mostre que se A é um CBO e $f : A \to B$ é um isomorfismo, então B é um CBO.

10. Sejam A e B conjuntos enumeráveis disjuntos. Mostre que $A \cup B$ é um CBO.

11. Seja A um CBO. Mostre que a família de todas os segmentos iniciais de A ordenado pela inclusão é um CBO.

12. Seja A um conjunto totalmente ordenado. Mostre que a família de todas as seções de A ordenado pela inclusão é totalmente ordenado.

13. Sejam A um conjunto totalmente ordenado, B um poset e $f : A \to B$ uma função crescente. Mostre que f é injetora se, e somente se, f é estritamente crescente.

14. Sejam A um conjunto totalmente ordenado e $\{E, D\}$ uma partição de A. Mostre que (E, D) é um corte de A se, e somente se, para todo $x \in E$ e $y \in D$, $x \leq y$.

15. Seja A um poset. Mostre que se B é uma seção de A se, e somente se, $(B, A - B)$ é um corte de A.

16. Sejam A um conjunto totalmente ordenado, B um subconjunto de A e $b \in B$. Mostre que B possui um menor elemento se, e somente se, $S_b \cap B$ possui um menor elemento.

17. Seja A um conjunto totalmente ordenado. Mostre que A é um CBO se, e somente se, qualquer segmento inicial de A é bem ordenado.

18. Seja A um conjunto totalmente ordenado. Mostre que A é um CBO se, e somente se, não existir cadeia descendente infinita em A, isto é, uma família
$$\{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$$
com $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Conclua que $[0, 1]$ não é um CBO.

19. Sejam A um CBO e $f : A \to A$ uma função crescente. Mostre que se qualquer subconjunto não vazio de A possui um supremo, então existe $a \in A$ tal que $f(a) = a$.

20. Seja A um CBO. Mostre que I_A é o único isomorfismo de A sobre A.

21. Sejam A e B dois CBO. Mostre que se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são isomorfismos, então $g = f^{-1}$.

22. Sejam A e B dois CBO. Mostre que existe no máximo um isomorfismo $f : A \to B$.